Objektive Mathematik

1) Einleitung:

Schon der Arbeitstitel scheint eine Tautologie zu enthalten. Gerade von einer Wissenschaft wie Mathematik wird erwartet, dass sie frei von subjektiven Merkmalen ist. Offenbar gilt dies für jede **Wissen**schaft denn der Begriff "Wissen" unterscheidet sich eben von Annahme, Axiom, Glauben etc. und "subjektive Mathematik" sollte demnach ebenso wie "subjektive Wissenschaft" eine contradictio in adiekto sein.

Wenn wir dennoch die Objektivität einer Wissenschaft allgemein und die der Mathematik im Besonderen zur Diskussion stellen dann deshalb, weil uns kein Kriterium bekannt ist, das die völlige Übereinstimmung der Inhalte eines Begriffs **für zwei verschiedene Personen** sicherstellen kann. Für die vorliegende Arbeit kann man etwa den Autor und einen Leser als zwei solche Personen annehmen.

Ein Begriff, den eine Person in irgendeinem Wissensgebiet verwendet, kann offenbar sinnvoll als **Objekt seines Denkens** angesehen werden. Wir werden daher im Weiteren auch von **Denkobjekten** sprechen.

Wählt man als Beispiel den Begriff "Zahl" wird dessen Unschärfe leicht erkennbar. Schärfer abgegrenzt erscheint schon der Begriff "natürliche Zahl". Vielfach kann auch das Umfeld, in dem ein Begriff verwendet wird, eine Rolle spielen.

Es ist hier noch auf eine weitere Relativierung des Inhaltes eines Begriffs hinzuweisen. Auch der Zeitpunkt, in dem der Begriff verwendet wird, kann eine Rolle spielen. Für ein und die selbe Person kann der Begriffsinhalt in zwei verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlich sein, so z.B. wenn etwa zwischen diesen Zeitpunkten neue Erkenntnisse gefunden wurden.

Im Besonderen werden wir im Weiteren die Mächtigkeit der Mengen von Begriffsinhalten, also die Mächtigkeit der Mengen von Denkobjekten, behandeln. Dabei wird es sich als hilfreich erweisen, auch ganz allgemeine Aussagen über alle **möglichen** Denkobjekte zu treffen. So kann man etwa überlegen, welche Eigenschaften ein Denkobjekt haben muss um Inhalt des Begriffs "Zahl" zu sein und welche Folgerungen sich daraus für die Mächtigkeit der Menge dieser Denkobjekte ergeben.

2) Mitteilungen:

Wir gehen davon aus. dass über jedes Denkobjekt einer Wissenschaft gesprochen werden kann, dass jede mögliche Aussage einer Person über ein Denkobjekt **anderen Personen mitgeteilt werden kann**. Die Frage ob überhaupt und wenn ja in welchem Sinn diese andere Person die Mitteilung versteht bleibe zunächst außer Betracht. Vorerst wollen wir die Eigenschaften jener Mitteilungen behandeln, die wir in den folgenden Untersuchungen verwenden.

Zugrundegelegt werden **schriftliche Mitteilungen** wie man sie auf eine Tafel schreiben oder zeichnen kann bzw. in einem Buch veröffentlicht. In der Praxis spielt dabei eine Rolle, in welcher Sprache eine Mitteilung verfasst ist und welche Fachkenntnisse der Mitteilende beim Leser der Mitteilung voraussetzt. Um solchen Fragen aus dem Weg zu gehen definieren wir die Menge der Mitteilungen wie folgt:

Jede Mitteilung M habe die Form eines quadratischen Rasters M_n bestehend aus n^2 **Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01 mm**. Jedes Elementarquadrat ist entweder weiß oder schwarz. Wir bezeichnen n als den **Umfang der Mitteilung M_n**. Offenbar lassen sich alle

Aussagen irgend einer Wissenschaft, insbesondere mathematische Sätze, in solcher graphischen Form darstellen.

Wir ordnen nun alle derartigen Mitteilungen folgendermaßen abzählbar an: Einem weißen Elementarquadrat wird die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 0 zugeordnet. Es sei a_{jk} jene Ziffer (1 oder 0), die dem in der j^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle liegenden Elementarquadrat zugeordnet ist. Jede von uns betrachtete Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

$$\mathbf{a(M_n) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}....a_{jk}....a_{nn}}$$

eindeutig gekennzeichnet. Um alle möglichen Mitteilungen M abzählbar anzuordnen fasst man zunächst alle Mitteilungen von gleichem Umfang n in Gruppen $G(M_n)$ zusammen und ordnet diese Gruppen nach der Größe von n an. Innerhalb jeder Gruppe $G(M_n)$ ordnet man sodann die Mitteilungen M_n nach der Größe der jeweiligen Dezimalzahl $a(M_n)$ an. Die daraus gewonnene abzählbare Anordnung aller möglichen Mitteilungen M bezeichnen wir mit **AO(M).**

3) Wahrheit und deren Relativität:

Wir bezeichnen eine Mitteilung M dann und nur dann als **wahr bezüglich einer Person P und einem Zeitpunkt T**, wenn M von P in T als wahr bezeichnet wird. Es handelt sich also um eine **relative Wahrheit** der Mitteilung M, nämlich nur bezogen auf das Urteil von P im Zeitpunkt T. Wir setzen dabei aber nicht voraus, dass M von P in T tatsächlich gelesen wird. Vielmehr bezeichnen wir M bezüglich P und T auch dann als wahr, wenn P in T dieses Urteil fällte, falls er M tatsächlich gelesen hätte. Jedes Urteil irgend einer anderen Person als P, wie z.B. das des Autors oder eines von P verschiedenen Lesers dieser Arbeit, ist dabei gegenstandslos. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir offenbar annehmen, dass P sein Urteil über M stets zumindest eine Sekunde lang aufrecht hält.

Es gibt allerdings keine Möglichkeit festzustellen, ob eine von P in T als wahr bezeichnete Mitteilung M von P tatsächlich als wahr angesehen wird. P ist bei der Beurteilung der Wahrheit von M völlig frei und kann auch wider besseres Wissen so urteilen. Die Einbeziehung auch solcher Urteile in unsere Überlegungen soll nur sicherstellen, dass keine **mögliche** Aussage "wahr" verloren geht.

4) Individualanordnung aller relativ wahren Mitteilungen:

Jede Beurteilung einer Mitteilung M durch eine Person P erfolgt innerhalb des **Raum-Zeit-Universums RZU** (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate). Das RZU kann durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in **vierdimensionale Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm und der Dauer von 0,01 Sekunden** zerlegt werden. Alle Elementarwürfel EW können mit Hilfe dieses Koordinatensystems unschwer abzählbar angeordnet werden. Es sei AO(EW) eine solche abzählbare Anordnung

Jedes Urteil irgend einer Person P in irgend einem Zeitpunkt T über die Wahrheit irgend einer Mitteilung M erfordert ein Mindestvolumen im RZU nämlich jenen Teil des Raumes RT(P), den der Körper der Person P beansprucht, und jene Zeitdauer ZD(U), während welcher P sein Urteil über M aufrecht hält. In diesem Mindestvolumen liegt daher mindestens ein Elementarwürfel EW = EW(P,T), der dieses Urteil eindeutig kennzeichnet. Dies leistet nämlich jeder EW, dessen Raumteil RT(EW) zur Gänze im Körper von P enthalten ist und dessen Zeitdauer ZD(EW,U) zur Gänze innerhalb von ZD(U) liegt.

Ein Urteil "wahr" muss P ausdrücklich bestätigen. In allen anderen Fällen, etwa wenn P gar kein Urteil abgibt, bezeichnen wir sein Urteil als "nicht wahr". Da jedes relativ wahre Urteil durch mindestens einen Elementarwürfel eindeutig gekennzeichnet wird und alle Elementarwürfel in AO(EW) abzählbar angeordnet wurden, lassen sich auch alle relativ wahren Urteile abzählbar anordnen.

Alle möglichen Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkt T über die Wahrheit jeder möglichen Mitteilung M lassen sich durch ein Tripel (P,T,M) eindeutig kennzeichnen. Das Tripel (P,T,M) soll dabei bedeuten, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M im Zeitpunkt T liest oder gelesen hätte, M als wahr bezeichnet. T ist dabei ein beliebiger Zeitpunkt aus irgend einem von P für sein Urteil in Anspruch genommenen Elementarwürfel EW aus dem RZU. Aus der abzählbaren Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen und der abzählbaren Anordnung AO(EW) aller Elementarwürfel folgt die Abzählbarkeit aller Tripel (P,T,M). Daraus gewinnt man eine abzählbare Anordnung AO(P,T,M). Im Hinblick auf die Personenabhängigkeit dieser Anordnung bezeichnen wir sie als **Individualanordnung**. Die Mächtigkeit der Menge aller Tripel (P,T,M) ist ihrer Abzählbarkeit wegen gleich N, der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

5) Die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen:

Wir betrachten der Einfachheit halber R(0,1), die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, die gleichmächtig wie die Menge aller reellen Zahlen ist. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass die Mächtigkeit dieser Menge gleich der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen, also gleich N ist. Zur Beweisführung definieren wir zunächst eine Obermenge $\mathcal{R}$ von R(0,1) von der leicht zu sehen sein wird, dass auch ihre Mächtigkeit gleich N ist.

Wir gehen dabei von Tripeln {P,T,M[R(0,1)]} aus. Ein solches Tripel soll bedeuten, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M[R(0,1)] im Zeitpunkt T liest oder gelesen hätte, die Aussage **"M[R(0,1)] beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei"** als "wahr" bezeichnet. Analog Abschnitt 4) gibt es mindestens einen Elementarwürfel EW = EW{P,T,M[R(0,1)]}, der dieses Urteil eindeutig kennzeichnet. Da alle Elementarwürfel EW in AO(EW) abzählbar angeordnet wurden lassen sich auch alle Tripel {P,T,M[R(0,1)]} in einer Anordnung AO{P,T,M[R(0,1)]} abzählbar anordnen. Jedem dieser Tripel entspricht dabei die von P in T als durch M = M[R(0,1)] eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben angesehene reelle Zahl zwischen 0 und 1. Diese Anordnung nennen wir **"Individualanordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1"**. Deren Menge bezeichnen wir mit $\mathcal{R}$**.** Die Mächtigkeit von $\mathcal{R}$ ist N. Es sei a_n die n^{te} Zahl dieser Anordnung.

Man überlegt sich leicht, dass jede Zahl aus dieser Individualanordnung beliebig oft in ihr auftritt. So braucht man nur etwa den Text einer Beschreibung unverändert lassen, ihn aber mit einem immer größer werdenden weißen Rand umgeben.

Es gibt auch beliebig viele Möglichkeiten, ein und dieselbe Zahl auf unterschiedliche Weise zu beschreiben. Auf das Fehlen eines Kriteriums über die subjektive Wahrheit eines Urteils von P in T über M wurde bereits verwiesen. Nicht zuletzt ist es offensichtlich in nur ganz wenigen Fällen möglich, die Frage, ob eine Mitteilung M von einer Person P als wahr bezeichnet wird, tatsächlich an P zu richten. Nicht nur bereits verstorbene oder noch nicht geborene Personen sind praktisch zur Beantwortung dieser Frage unerreichbar.

Die weite Fassung der Menge $\mathcal{R}$ soll wieder analog 3) nur sicherstellen, dass keine mögliche reelle Zahl übersehen wird.

6) Die Vollständigkeit der Individualanordnung:

Wir wollen nun zeigen, dass die Individualanordnung AO{P,T,M[R(0,1)]} der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gemäß 5) insoweit vollständig ist, als jeder Versuch, eine in ihr angeblich nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 anzugeben, misslingt und zu einem Widerspruch führt.

Von einem Kritiker der Vollständigkeit verlangen wir, dass er in irgend einem Zeitpunkt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die angeblich nicht in der Individualanordnung enthalten ist, durch eine Mitteilung eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Die Person des Kritikers bezeichnen wir mit P_K, den Zeitpunkt seiner Kritik mit T_K und die Mitteilung, welche die in der Individualanordnung angeblich fehlende reelle Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, mit

$$M_K = M_K[R(0,1)].$$

Die Behauptung des Kritikers kann nun folgendermaßen dargestellt werden:

$$\{P_K,T_K,M_K[R(0,1)]\} \notin AO\{P,T,M[R(0,1)]\}$$

Der Kritiker P_K behauptet aber im Zeitpunkt T_K, dass die Mitteilung $M_K[R(0,1)]$ eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt und daraus folgt **definitionsgemäß**

$$\{P_K,T_K,M_K[R(0,1)]\} \in AO\{P,T,M[R(0,1)]\}$$

Die Behauptung des Kritikers führt also zu einem Widerspruch. Damit ist es ihm nicht gelungen, eine Unvollständigkeit der Individualanordnung gemäß 5) und damit eine Unvollständigkeit von $\mathcal{R}$ widerspruchsfrei nachzuweisen.

7) Der Zirkelschluss von CANTOR:

Mit seinem zweiten Diagonalargument möchte CANTOR die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 beweisen. Er geht dabei von einer beliebigen Anordnung

$$AO[R(0,1)]: a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots$$

von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 aus und will zeigen, dass jede derartige Anordnung unvollständig ist. Zunächst werden von ihm die reellen Zahlen a_n als unendliche Dezimalzahlen dargestellt und folgendermaßen angeordnet:

$$\begin{array}{l} a_1 = 0,a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n}\ldots\ldots \\ a_2 = 0,a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n}\ldots\ldots \\ \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ a_n = 0,a_{n1}a_{n2}\ldots\ldots a_{nn}\ldots\ldots \\ \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nun wird eine **Diagonalzahl** $d = 0,d_1d_2\ldots\ldots d_n\ldots\ldots$ gebildet, die sich in der n^{ten} Dezimalstelle vom jeweiligen a_{nn} unterscheidet. Dies leistet. z.B. eine Diagonalzahl d mit $d_n = 1$ für $a_{nn} \neq 1$ und $d_n = 2$ für $a_{nn} = 1$. Daraus folgt

$$\forall n: d \neq a_n.$$

Bei d handelt es sich also scheinbar um eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die nicht in AO[R(0,1)] enthalten ist, womit die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung AO[R(0,1)] und damit auch die Überabzählbarkeit von R(0,1) bewiesen wäre.

Tatsächlich hat diese Argumentation aber eine entscheidende Schwachstelle. Der Nachweis der Abzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen durch den Nachweis der Vollständigkeit der Individualanordnung gemäß 6) benützt Mitteilungen M, deren Umfang zwar unbegrenzt aber stets endlich ist. Sie sind also nur potentiell unendlich. Demgegenüber erfordert die vollständige Beschreibung der Diagonalzahl d, dass alle für ihre Berechnung notwendigen Zahlen a_n bereits "aktual" zur Verfügung stehen. Dieses aktual Unendliche Element wird für den erst zu führenden Beweis der Überabzählbarkeit bereits herangezogen. Ein offensichtlicher Zirkelschluss.

In der Terminologie gemäß 6) entspricht nämlich CANTOR dem Kritiker P_K, irgend ein Zeitpunkt seiner Kritik T_K und die Beschreibung der Diagonalzahl zusammen mit der darauf begründeten Schlussfolgerung der Unvollständigkeit von AO[R(0,1)] der (endlichen) Mitteilung $M_K = M_K(d)$. Da P_K selbst in T_K die Feststellung, d beschreibe eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei, als "wahr" bezeichnet, entspricht das Tripel (P_K, T_K, M_K) einem der Tripel (P,T,M) aus 5) aus denen wir die Individualanordnung AO[RZ(0,1)] der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gebildet haben. Daher kommt d ein Platz in der Individualanordnung zu. Wir bezeichnen die Nummer dieses Platzes mit K. Die auf ihm stehende Zahl ist daher a_K. Für die Diagonalzahl gilt somit **definitionsgemäß**

$$\exists_K: d = a_K.$$

Damit steht P_K im Widerspruch zu

$$\forall n: d \neq a_n$$

wie vorhin gefordert.

Die Diagonalzahl d enthält also bereits in ihrer Definition einen Widerspruch. Der Versuch von P_K, mit Hilfe der Diagonalzahl d eine in der Individualanordnung AO[RZ(0,1)] der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht enthaltene reelle Zahl aus R(0,1) eindeutig und widerspruchsfrei anzugeben, ist somit misslungen.

Analoge Schwächen zeigen sich bei anderen bekannten Beispielen von scheinbar überabzählbaren Mengen wie etwa die Menge der einstelligen ganzzahligen Funktionen oder die Potenzmenge von N.

8) Die Objektivierung der Mathematik:

Ein wesentlicher Bestandteil unserer Überlegungen ist die Einbeziehung des Urteils einer Person in die Untersuchungen. Es wird darauf verzichtet als Arbiter Mundi objektiv gültige Wahrheiten innerhalb von Wissenschaften wie der Mathematik zu suchen. Man betrachtet Mathematik betreibende Personen sozusagen von außen. Damit wird alles Subjektive, wie z.B Urteile wie "wahr" oder "nicht wahr", aus der Mathematik entfernt. In ihr verbleiben nur mehr Aussagen über Urteile Mathematik betreibender Personen ohne zur Frage der Richtigkeit dieser Urteile selbst Stellung zu nehmen. Auf diese Weise gelangt man zu einer Objektivierung.

Diese Überlegungen lassen sich grundsätzlich in allen Wissenschaften anstellen. Wie Mitteilungen M[R(0,1)] in 5) zur Untersuchung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 definiert wurden betrachtet man für ein beliebiges Denkobjekt DO Mitteilungen M[DO]. Analog 5) bedeutet ein Tripel {P,T,M[DO]}, dass die Person P im Zeitpunkt T die Aussage **"M[DO] beschreibt ein Denkobjekt DO eindeutig und widerspruchsfrei"** als "wahr" bezeichnet. Wieder analog 5) bildet man eine **Individualanordnung aller Denkobjekte DO**. Deren Menge bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$ und ihre Mächtigkeit ist wieder N.

Somit kann schließlich die Menge aller möglichen Denkobjekte aller Wissenschaften abzählbar angeordnet werden und ihre Mächtigkeit ist N. Dies erlaubt sie Aussage: "Die Welt ist abzählbar". Für den Bereich außerhalb von $\mathcal{D}$ sollte man mit WITTGENSTEIN sagen: "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen":